

п 422

Диск радиусом $R = 8 \text{ см}$ несет $\sigma = 100 \text{ нКл/м}^2$.
 Опред. магн. момент p_m , обусловленный
 вращением диска, отн-ко оси, прох. через
 его центр и \perp плоскости диска.
 $\omega = 60 \text{ рад/с}$

Дано:

$$R = 8 \text{ см} = 0,08 \text{ м.}$$

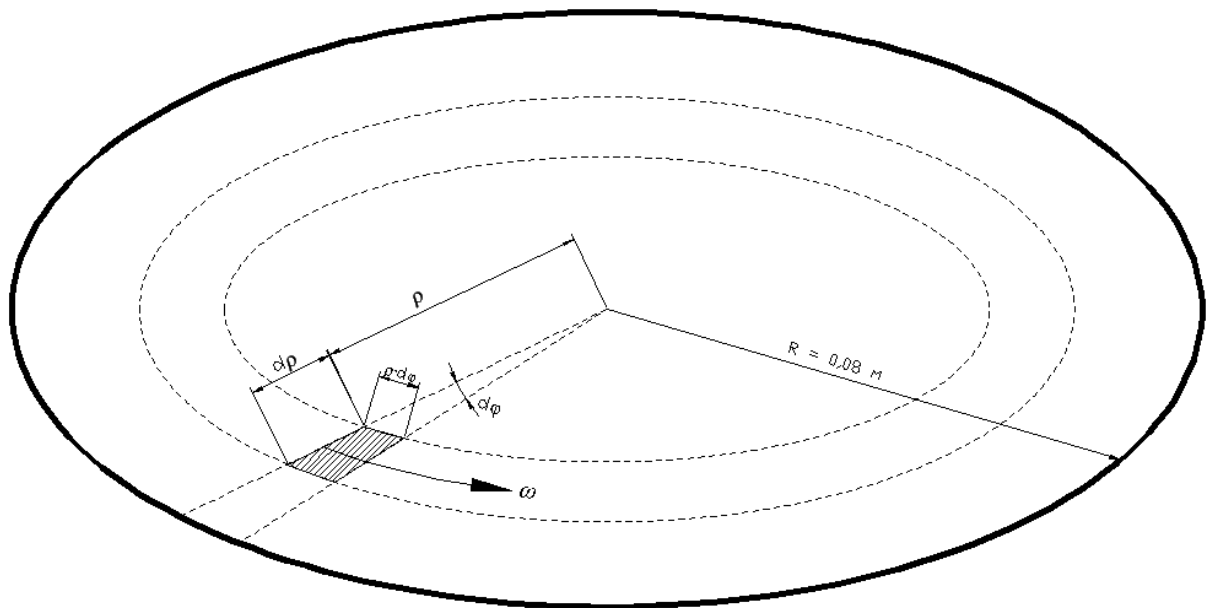
$$\sigma = 100 \text{ нКл/м}^2$$

$$\omega = 60 \text{ рад/с}$$

$$p_m = ?$$

Решение

Рассмотрим элементарную площадку диска с зарядом dq , равным
 произведению площади этой площадки $dr \cdot r \cdot d\varphi$ на величину
 поверхностной плотности заряда σ :



Движение элементарной площадки по кругу при вращении диска с зарядом
 эквивалентно круговому току, который в данном случае определяется
 выражением:

$$dI_{\text{экв.}} = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi}{T}$$

где T – период обращения по окружности.

Период обращения T и угловая скорость ω вращения связаны соотношением:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{или} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Отсюда получаем:

$$dI_{\text{экв.}} = \frac{\sigma \cdot \omega}{2\pi} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

Магнитный момент эквивалентного кругового тока найдем по формуле:

$$dp_m = dI_{\text{экв.}} \cdot S = dI_{\text{экв.}} \cdot \pi \rho^2 = \frac{\sigma \cdot \omega}{2\pi} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot \pi \rho^2 = 0,5\sigma \cdot \omega \cdot \rho^3 \cdot d\varphi \cdot d\rho$$

где S – площадь, ограниченная окружностью, описываемой элементарной площадкой.

Для нахождения p_m выполняем двойное интегрирование, то есть двойное суммирование. Сначала суммируются эквивалентные токи от вращения элементарных площадок по одной окружности радиусом ρ , при этом φ меняется от 0 до 2π . Затем суммируются круговые токи по всем окружностям от центра диска до края, при этом ρ меняется от 0 до R :

$$p_m = 0,5\sigma \cdot \omega \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 0,5\sigma \cdot \omega \cdot \int_0^R \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \rho^3 d\rho =$$

$$= 0,5\sigma \cdot \omega \cdot (2\pi - 0) \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho = \sigma \cdot \omega \cdot \pi \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho = \sigma \cdot \omega \cdot \pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R =$$

$$= 0,25\sigma \cdot \omega \cdot \pi \cdot R^4$$

Подставив в формулу числовые значения, найдем:

$$p_m = 0,25 \cdot 100 \cdot 60 \cdot 3,14 \cdot 0,08^4 = 0,064 \text{ (A} \cdot \text{м}^2\text{)}$$

Ответ: $p_m = 0,064 \text{ A} \cdot \text{м}^2$

№ 432

В данной задаче нет условия. Но есть данные. На основании их решить. Задача начата, нужно проверить или решить, если имеющееся решение неверно.

432

Дано:
ион Na
 $q=1$
 $u=1\text{ кВ.}$
 $B=0,5\text{ Тл.}$
 $R=4,37\text{ м.}$
А=?

Решение:

$\vec{F}_L = q \vec{v} \vec{B}$ (1) — сила Лоренца

$\vec{F} = m \vec{a}_n$ — II закон Ньютона.

$F = m a_n$ (2)

$a_n = \frac{v^2}{R}$ (3) $F_L = q v B$ (4)

м.к. $v \perp B$
 $\sin \alpha = 1$

подставим (3) в (2):

$q v B = m \frac{v^2}{R}$; $m v^2 = q v B R$

~~$m = \frac{q v B R}{v^2}$~~ $m = \frac{q B R}{v}$ (5)

~~$m = \frac{q v B R}{v^2}$~~

$R = \frac{\sqrt{2 m q u}}{q B}$; $R^2 = \frac{2 m q u}{q^2 B^2} = \frac{2 m u}{q B}$

$m = \frac{R^2 q B}{2 u}$ (6)

привед. (5) и (6):

$\frac{q B R}{v} = \frac{R^2 q B}{2 u}$; $\frac{1}{v} = \frac{R}{2 u}$; $v = \frac{2 u}{R}$ (7)

(7) подставим в (5):

$m = \frac{q B R^2}{2 u} = \frac{1 \cdot 0,5 \cdot (4,37 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 10^3} = 4,7 \cdot 10^{-7} \text{ (кг.)}$ ~~$m = \frac{q v B R}{v^2}$~~

До формулы (5) все правильно. Дальше непонятно: надо найти какое-то A , вместо этого ищется m ? Без условия ничего не могу сделать...

№ 412.

По двум парал. проводкам, находящихся на одинак. расстоянии $a = 20 \text{ см}$ протекает ток

№ 302

Определить модуль и направление силы F действующей на один из зарядов со стороны двух других

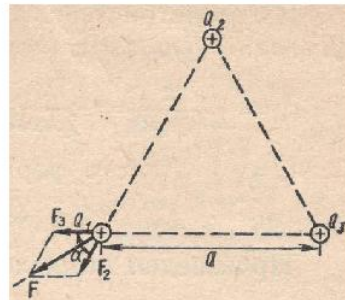
Дано:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2 \text{ нКл} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$a = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

Решение:



Значение силы F действующей на заряды определяется по формуле

$$F = Q \cdot E, \text{ где } E - \text{ напряженность поля}$$

Для решения данной задачи выберем заряд Q_1 , и будем определять модуль и направление силы F , действующей на Q_1 со стороны Q_2 и Q_3 согласно закону Кулона:

$$F_2 = F_3 = \frac{10^{-18}}{0,2 + 49 \cdot 10^{-12}}$$

$$F_2 = F_3 = 26 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$$

Решение не верно! Векторы F_2 и F_3 складываются по правилу треугольника!

Вектор силы F находим как сумму двух векторов сил F_2 и F_3 . В связи с равенством этих сил вектор силы F будет направлен вдоль продолжения биссектрисы угла равностороннего треугольника. Модуль силы F по правилу сложения векторов (по формуле косинусов) равен:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_2^2 + F_3^2 + 2F_2 \cdot F_3 \cdot \cos \varphi} = \sqrt{(3,6 \cdot 10^{-6})^2 + (3,6 \cdot 10^{-6})^2 + 2 \cdot (3,6 \cdot 10^{-6})^2 \cdot \cos 60^\circ} = \\ &= \sqrt{2 \cdot (3,6 \cdot 10^{-6})^2 + 2 \cdot (3,6 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 0,5} = \sqrt{3 \cdot (3,6 \cdot 10^{-6})^2} = 3,6 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{3} = \\ &= 6,24 \cdot 10^{-6} \text{ (H)} \end{aligned}$$

№ 372

Сила тока в проводнике изменяется во времени по закону $I = I_0 e^{-\lambda t}$, где $I_0 = 20 \text{ A}$, $\lambda = 10^2 \text{ c}^{-1}$. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за время $t = 10^{-2} \text{ c}$.

Дано:

$$I = I_0 e^{-\lambda t}$$

$$I_0 = 20 \text{ A}$$

$$\lambda = 10^2 \text{ c}^{-1}$$

$$t = 10^{-2}$$

Q = ?

Решение:

По 1-му закону Джоуля - Ленца

$$dQ = \frac{U^2}{R} dt = I^2 R dt \quad (1)$$

В уравнение (1) сила тока является величиной.

функцией времени.

$$I = I_0 e^{-\lambda t} \quad (2)$$

в уравнение (1) формула (2) примет вид

$$dQ = I_0^2 e^{-2\lambda t} R dt \quad (3)$$

Для определения теплоты, выделившейся за время t , (3) надо проинтегрировать в пределах от 0 до t .

$$\int dQ = \int I_0^2 e^{-2\lambda t} R dt$$

$$Q = I_0^2 R \int_0^t e^{-2\lambda t} dt = I_0^2 R \left[-\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda t} \right]_0^t = I_0^2 R \left(-\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda t} + \frac{1}{2\lambda} \right)$$

$$Q = I_0^2 \cdot R \cdot \int_0^t e^{-2\alpha \cdot t} dt = I_0^2 \cdot R \cdot \frac{1}{-2\alpha} \cdot \int_0^t e^{-2\alpha \cdot t} d(-2\alpha \cdot t) = I_0^2 \cdot R \cdot \frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha \cdot t} \Big|_0^t =$$

$$= I_0^2 \cdot R \cdot \frac{1}{-2\alpha} \cdot (e^{-2\alpha \cdot t} - e^{-2\alpha \cdot 0}) = I_0^2 \cdot R \cdot \frac{1}{-2\alpha} \cdot (e^{-2\alpha \cdot t} - 1) = \frac{I_0^2 \cdot (1 - e^{-2\alpha \cdot t})}{2\alpha} \cdot R$$

Подставляю числовые значения заданных величин и получаю количество теплоты, выделившееся в проводнике сопротивлением R за время $t = 10^{-2}$ с, выраженное через сопротивление проводника:

$$Q = \frac{20 \cdot (1 - e^{-2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-2}})}{2 \cdot 10^2} \cdot R = \frac{1 - e^{-2}}{10} \cdot R = \frac{1 - \frac{1}{2,718^2}}{10} \cdot R = \frac{1 - 0,135}{10} \cdot R = 0,087 \cdot R$$

Ответ: $Q = 0,087 \cdot R$

№ 402

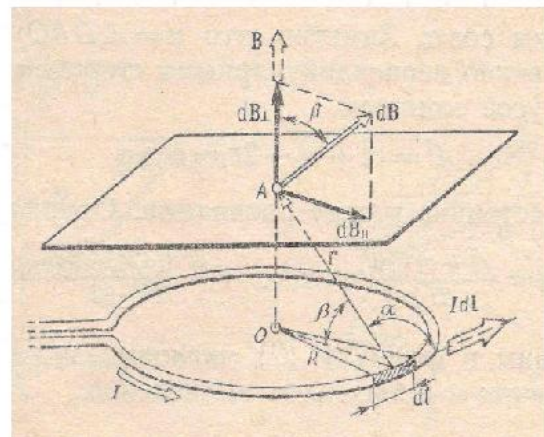
Магнитный момент m токового проводящего кольца $r_m = 5 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ окруж, магнит, индукция B в т. А; как, на оси кольца и удаленной от точки кольца на $z = 20 \text{ см}$.

Дано:

$$r_m = 5 \text{ А} \cdot \text{м}^2$$

$$z = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

$B = ?$



Решение

Для решения задачи воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа в векторной форме:

$$[dB] = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot [dl \times r]}{4\pi \cdot r^3}$$

где $[dB]$ – вектор магнитной индукции поля, создаваемого током I в бесконечно малом элементе длиной dl в точке, определяемой радиус-вектором $[r]$.

Выделим на кольце элемент dl и от него в точку А на оси кольца проведем радиус-вектор $[r]$. Вектор $[dB]$ направим в соответствии с правилом буравчика. Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, вектор магнитной индукция в точке А определяется интегрированием по всей длине кольца:

$$[B] = \int_l [dB]$$

Разложим вектор магнитной индукции на две составляющие: $[dB \perp]$ – перпендикулярную плоскости кольца и $[dB \parallel]$ – параллельную плоскости кольца. Тогда можно составить векторную сумму $[dB] = [dB \perp] + [dB \parallel]$:

$$[B] = \int_l [dB \perp] + \int_l [dB \parallel]$$

Очевидно, что в связи с зеркальной симметрией векторов $[dB \parallel]$ на противоположных сторонах кольца получаем:

$$\int_l [dB \parallel] = 0$$

Тогда, поскольку все вектора $[dB \perp]$ сонаправлены, можно векторное интегрирование заменить скалярным:

$$B = \int_l dB \perp$$

Из чертежа видно, что модуль $[dB \perp]$ равен:

$$dB \perp = dB \cdot \cos \beta.$$

В свою очередь модуль $[dB]$ с учетом, что $\sin \alpha = 1$, равен:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{4\pi \cdot r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cdot dl.$$

где μ_0 – магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м)

Таким образом, подставив эти выражения и интегрируя по длине кольца от 0 до $2\pi R$, получим:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cdot \cos \beta \cdot \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} \cdot \cos \beta \cdot (2\pi R - 0) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R}{2r^2} \cdot \cos \beta$$

Магнитный момент контура, которым является тонкое кольцо, равен:

$$p_m = I \cdot S = I \cdot \pi \cdot R^2 \quad \rightarrow \quad I = \frac{p_m}{\pi \cdot R^2}$$

Тогда получаем:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot p_m \cdot R}{2r^2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \cos \beta = \frac{\mu_0 \cdot p_m}{2r^2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \cos \beta$$

Вместо радиуса R запишем $R = r \cdot \cos \beta$. Тогда окончательно получим:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot p_m}{2r^2 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos \beta} \cdot \cos \beta = \frac{\mu_0 \cdot p_m}{2\pi \cdot r^3}$$

Подставляем числовые значения и находим:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi \cdot 0,2^3} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ (Тл)}$$

№ 412.

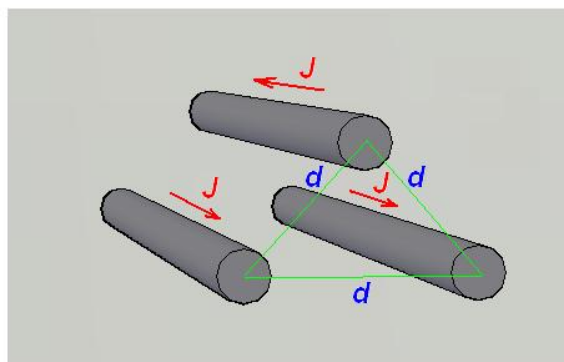
По двум параллельным проводникам, находящимся на одинаковом расстоянии $d = 20 \text{ см}$ друг от друга, текут одинаковые токи $I = 400 \text{ А}$. В двух проводниках направление токов совпадают. Вычислите для каждого из проводов отношение силы к его длине.

Дано.

$$d = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$$

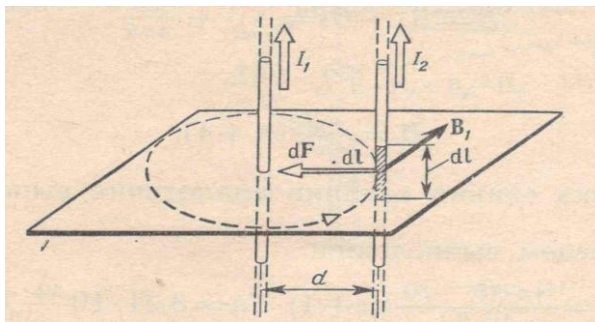
$$I = 400 \text{ А}$$

$$\frac{F}{l} = ?$$



Решение:

Рассмотрим взаимодействие двух проводов, по которым ток течет в одинаковом направлении. Их взаимодействие осуществляется через магнитное поле, которое создает каждый из проводов и которое действует на другой провод. Проведем пунктиром линию магнитной индукции условно обозначенного первого провода через второй провод и по касательной к ней проведем вектор магнитной индукции \mathbf{B}_1 :



Модуль магнитной индукции определяется соотношением:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}$$

Согласно закону Ампера, на каждый элемент второго провода с током I_2 длиной dl действует в магнитном поле сила

$$dF = I_2 B_1 dl \sin(\widehat{dl \mathbf{B}}).$$

Так как вектор dl перпендикулярен вектору \mathbf{B}_1 , то $\sin(\widehat{dl \mathbf{B}}) = 1$ и тогда

$$dF = I_2 B_1 dl.$$

Подставив в это выражение B_1 получим

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl.$$

Силу F взаимодействия проводов с током найдем интегрированием:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^l dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l.$$

Заметив, что $I_1 = I_2 = I$, получим

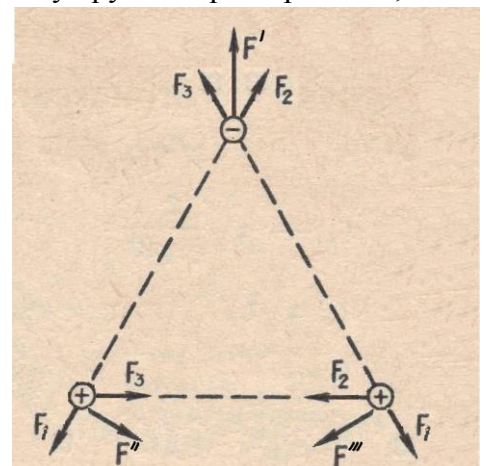
$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}.$$

или

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400^2 \cdot l}{2\pi \cdot 0,2} = 0,16 \cdot l$$

По правилу буравчика вектор силы F будет направлен в сторону другого провода.

Аналогично можно получить такую же по модулю силу между другой парой проводов, по которым токи текут в противоположных направлениях, только вектор силы F будет направлен от другого провода. Таким образом, если провести сечение перпендикулярное направлению проводов и обозначить знаком «+» провода, в которых токи текут одним направлением, и знаком «-» провод, в котором ток течет другом направлением, то силы F_1 , F_2 и F_3 , действующие на провода будут иметь одинаковые значения, но разные направления, показанные на схеме →



Вектор силы F' находим как сумму двух векторов сил F_2 и F_3 . В связи с равенством модулей этих сил вектор силы F будет направлен вертикально вверх. Модуль силы F' по правилу сложения векторов равен:

$$\begin{aligned}
 F' &= \sqrt{F^2 + F_3^2 + 2F_2^2 \cdot F_3^2 \cdot \cos\varphi} = \sqrt{(0,16 \cdot l)^2 + (0,16 \cdot l)^2 + 2 \cdot (0,16 \cdot l)^2 \cdot \cos 60^\circ} = \\
 &= \sqrt{2 \cdot (0,16 \cdot l)^2 + 2 \cdot (0,16 \cdot l)^2 \cdot 0,5} = \sqrt{3 \cdot (0,16 \cdot l)^2} = 0,16 \cdot l \cdot \sqrt{3} = \\
 &= 0,28 \cdot l
 \end{aligned}$$

Вектор силы F'' находим как сумму двух векторов сил F_1 и F_3 . В связи с равенством модулей этих сил вектор силы F будет направлен вдоль биссектрисы угла между направлениями векторов этих сил, то есть под углом $120^\circ/2 = 60^\circ$. Модуль силы F'' по правилу сложения векторов равен:

$$\begin{aligned}
 F'' &= \sqrt{F_1^2 + F_3^2 + 2F_1^2 \cdot F_3^2 \cdot \cos\varphi} = \sqrt{(0,16 \cdot l)^2 + (0,16 \cdot l)^2 + 2 \cdot (0,16 \cdot l)^2 \cdot \cos 120^\circ} = \\
 &= \sqrt{2 \cdot (0,16 \cdot l)^2 + 2 \cdot (0,16 \cdot l)^2 \cdot 0,81} = \sqrt{3,62 \cdot (0,16 \cdot l)^2} = 0,16 \cdot l \cdot \sqrt{3,62} = \\
 &= 0,31 \cdot l
 \end{aligned}$$

Модуль силы F''' равен модулю силы F'' и направлен симметрично вектору F'' .

Для нахождения отношения силы, действующей на проводник, к его длине умножим каждый из найденных векторов на скалярную величину $1/l$. При этом получим векторные величины тех же направлений, но с другими модулями равными отношению силы к длине:

$$\frac{F'}{l} = 0,28, \quad \frac{F''}{l} = 0,31, \quad \frac{F'''}{l} = 0,31$$